

Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 4

Esercizio 1. Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

nei seguenti casi:

(a) $f(x, y) = (x + y)^2 + \pi^e$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $v = (0, -1)$

(b) $f(x, y) = ye^{x^2} + \sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(c) $f(x, y) = -x \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{3+t^4}} + 2 \log x$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, v versore della retta $y = 2x - 1$ orientata nel verso delle x crescenti

Esercizio 2. Siano $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un generico versore e

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ e dedurre che f non è differenziabile.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x, y) = x \sin y$, determinare per quali versori $v \in \mathbb{R}^2$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = 0.$$

Esercizio 4. Data la funzione $f(x, y) = 2 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$

i. calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$,

ii. stabilire se f è differenziabile in $(1, 0)$.

Esercizio 5. Data la funzione $f(x, y) = y^{2/3}(x-2)^{1/3}$

i. studiare la differenziabilità in \mathbb{R}^2 ,

ii. calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Esercizio 6. Mostrare che non esiste alcuna funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f_x(x, y) = (1 + y^2)^x \log(1 + y^2), \quad f_y(x, y) = 2xy(1 + y^2)^x.$$

Esercizio 7. Determinare, se esiste, la funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f_x(x, y) = (4x^3 + 1)y, \quad f_y(x, y) = x^4 + x + 2y \quad f(0, 0) = 1.$$

Esercizio 8. Una funzione di N variabili si dice armonica in un insieme aperto A se ammette derivate seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e se esse soddisfano l'equazione alle derivate parziali (detta *equazione di Laplace*)

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{in } A.$$

Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme di definizione:

(a) $u(x_1, x_2) = e^{x_1} \sin(x_2)$

(b) $u(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2)$

(c) $u(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1}$

(d) $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

(e) $u(x) = u(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$